

Distribuições Quase-Estacionárias em Processos Populacionais

Célio Terra

Universidade Federal do Rio de Janeiro

14/05/2025

- Λ : espaço de estados enumerável
- $(X_t)_t$: cadeia de Markov em Λ
- se a cadeia for irredutível e recorrente positiva, existe uma única distribuição estacionária μ , e a distribuição da cadeia converge para μ

- $\Lambda_0 = \Lambda \cup \{\emptyset\}$, com $\emptyset$ um estado absorvente
- $\tau := \inf t > 0; X_t = \emptyset$
- $\mathbb{P}^x(\tau < \infty) = 1$.
- Ex.: processos populacionais subcríticos: ramificação, contato...
- Única medida invariante é trivial: $\delta_\emptyset$

- $\Lambda_0 = \Lambda \cup \{\emptyset\}$, com $\emptyset$ um estado absorvente
- $\tau := \inf t > 0; X_t = \emptyset$
- $\mathbb{P}^x(\tau < \infty) = 1$.
- Ex.: processos populacionais subcríticos: ramificação, contato...
- Única medida invariante é trivial: $\delta_\emptyset$
- Questão: qual o comportamento da cadeia *dado que ela ainda não se extinguiu?*

Definição

Uma distribuição ν em Σ é chamada de *distribuição quase-estacionária* (DQE) se, para todo $x \in \Lambda$,

$$\mathbb{P}^\nu(X_t = x \mid \tau > t) = \nu(x).$$

Definição

Uma distribuição ν em Σ é chamada de *distribuição quase-estacionária* (DQE) se, para todo $x \in \Lambda$,

$$\mathbb{P}^\nu(X_t = x \mid \tau > t) = \nu(x).$$

Proposição

Se o estado inicial é sorteado a partir de uma DQE, o tempo de extinção tem distribuição exponencial.

Definição

Uma distribuição ν é chamada de *limite de Yaglom* se, para todos $x, y \in \Lambda$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}^y(X_t = x \mid \tau > t) = \nu(x).$$

Definição

Uma distribuição ν é chamada de *limite de Yaglom* se, para todos $x, y \in \Lambda$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}^y(X_t = x \mid \tau > t) = \nu(x).$$

Proposição

Todo limite de Yaglom é uma DQE.

Demonstração

Seja ν um limite de Yaglom. Para toda f contínua e limitada,

$$\mathbb{E}^\nu(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x(f(X_t) | \tau > t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}^x(f(X_t); \tau > t)}{\mathbb{P}^x(\tau > t)}.$$

Tomando $f(y) = \mathbb{P}^y(\tau > t)$,

$$\mathbb{P}^\nu(\tau > s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}^x(\tau > t + s)}{\mathbb{P}^x(\tau > t)}.$$

De maneira similar, tomando $f(y) = \mathbb{P}^y(X_s = z, \tau > s)$, com $z \in \Lambda$,

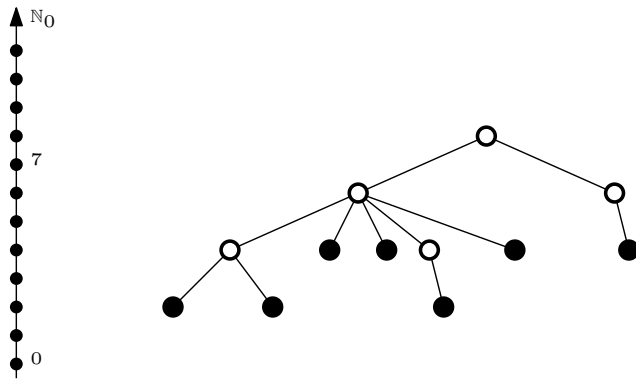
$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\nu(X_s = z; \tau > s) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}^x(X_{t+s} = z; \tau > t + s)}{\mathbb{P}^x(\tau > t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}^x(X_{t+s} = z; \tau > t + s)}{\mathbb{P}^x(\tau > t + s)} \frac{\mathbb{P}^x(\tau > t + s)}{\mathbb{P}^x(\tau > t)}. \end{aligned}$$

O primeiro termo converge para $\nu(z)$, logo $\nu(x) = \mathbb{P}^\nu(X_s = z | \tau > s)$.

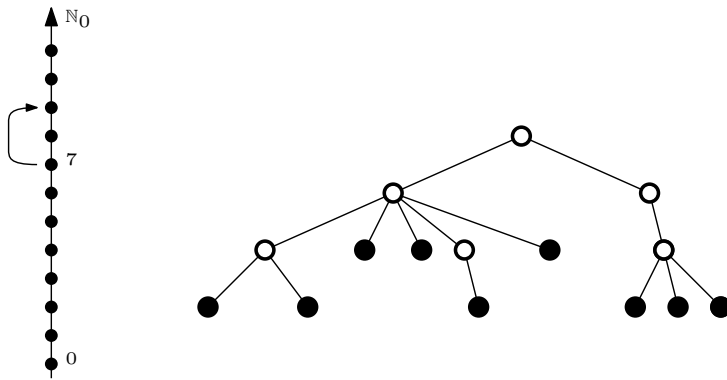
- Existência de limite de Yaglom para o processo de ramificação subcrítico em tempo discreto [Yaglom, 1947]
- Existem infinitas DQEs!

- O processo de contato também possui um limite de Yaglom [Andjel, Ezanno, Groisman, Rolla, 2015]
- É a única DQE [Arrejería, Groisman, Rolla, 2020]
- Por quê?

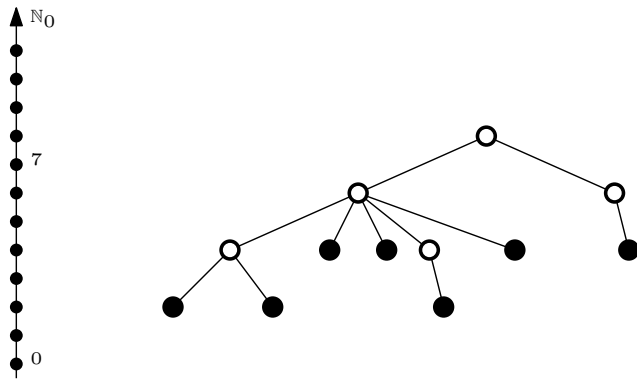
O processo de ramificação com genealogia



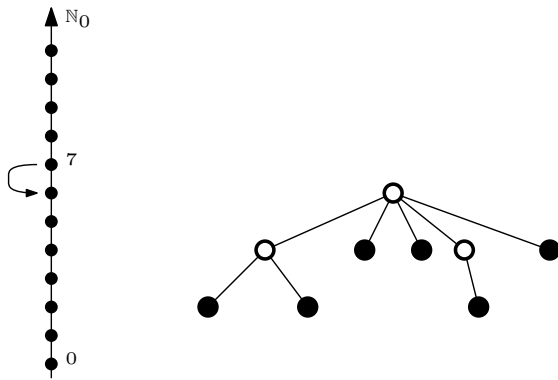
O processo de ramificação com genealogia



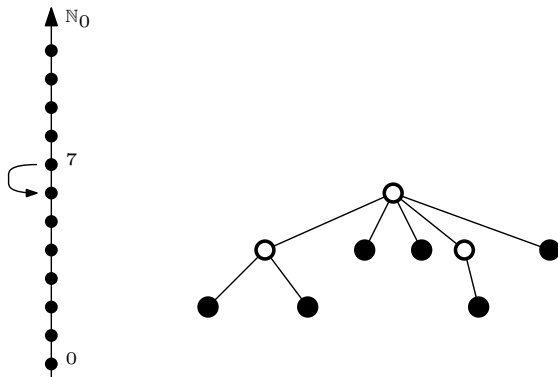
O processo de ramificação com genealogia



O processo de ramificação com genealogia



O processo de ramificação com genealogia



Theorem (Groisman, Rolla, T., 2025+)

O processo de ramificação com genealogia subcrítico tem uma única DQE.

- *Passeios aleatórios com ramificação*
- Insere um elemento espacial no processo de ramificação
- Não possui DQE!

- *Passeios aleatórios com ramificação*
- Insere um elemento espacial no processo de ramificação
- Não possui DQE!

Theorem (Groisman, Rolla, T., 2025+)

O passeio aleatório com ramificação módulo translações subcrítico possui uma única DQE.

Obrigado!